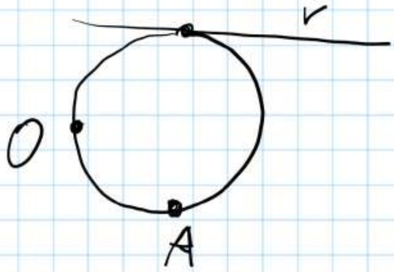
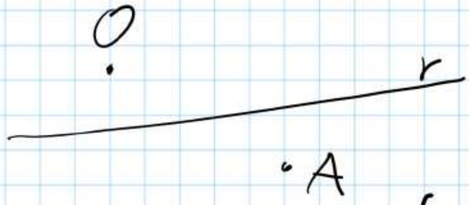
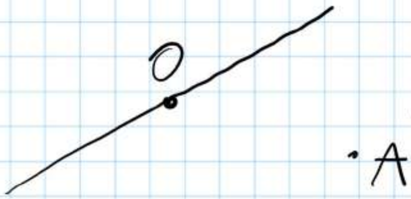
Esercizio: determinare (se esiste) la circonferenza che passa per i punti $O=(0,0)$, $A=(-6,-4)$ ed è tangente la retta $r: 2x+3y-1=0$

Sol: Situazioni geometriche possibili

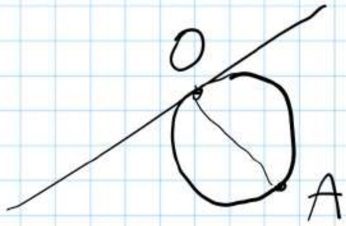




Nessuna circonferenza perché una circonferenza tangente a una retta è contenuta in uno dei dei due semipiani individuati dalla retta



No



Se $O \in r$, esiste la circonferenza se e solo se la proiezione di A su r è O

Passiamo alla soluzione algebrica

Imponiamo il passaggio per A e per O alla generica circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Otteniamo

$$\begin{cases} 0+0+0+0+c=0 \\ 36+16-6a-4b+c=0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c=0 \\ b=13-\frac{3}{2}a \end{cases}$$

La generica circonferenza per A e O ha equazione

$$x^2+y^2+ax+\left(13-\frac{3}{2}a\right)y=0$$

Imponiamo la tangenza con $r: 2x+3y-1=0$

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ x^2+y^2+ax+\left(13-\frac{3}{2}a\right)y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y\right)^2+y^2+a\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y\right)+\left(13-\frac{3}{2}a\right)y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y \\ \frac{13}{4}y^2+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}a+13-\frac{3}{2}a\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)=0 \end{cases}$$

La risolvente è

$$\frac{13}{4}y^2+\left(\frac{23}{2}-3a\right)y+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)=0$$

Per imporre la tangenza, poniamo il discriminante uguale a 0

$$\left(\frac{23}{2}-3a\right)^2-4\,\frac{13}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)=0$$

$$\frac{529}{4}-69a+9a^2-\frac{13}{4}-\frac{13}{2}a=0$$

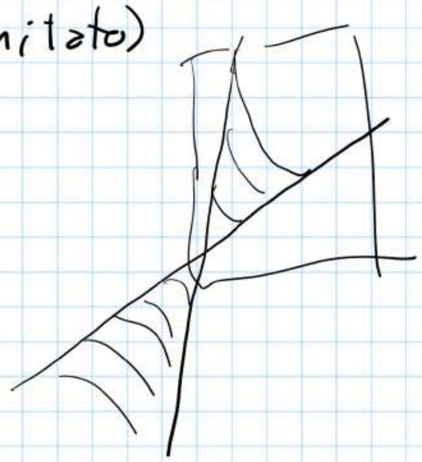
$$9a^2-\frac{151}{2}a+129=0$$

$$a=\frac{151/2\pm\sqrt{\frac{22801}{4}-4\cdot 9\cdot 129}}{18}=\frac{151/2\pm\sqrt{\frac{4225}{4}}}{18}=$$

$$\frac{\frac{151}{2}\pm\frac{65}{2}}{18}=\begin{cases}\frac{216}{36}=6 \\ \frac{86}{36}=\frac{43}{18}\end{cases}$$

In corrispondenza di tali valori trovo 2 circonferenze che soddisfano le condizioni date.

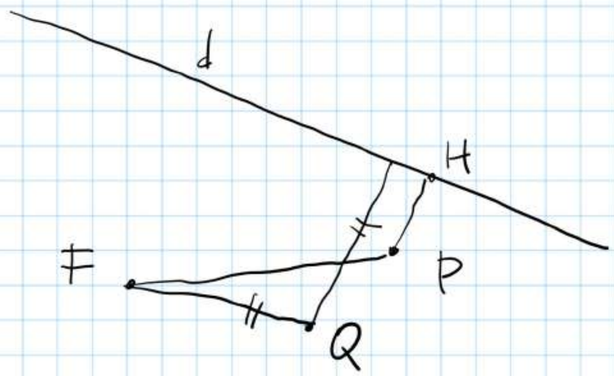
Coniche: sono curve che si ottengono tramite la sezione piana di un cono circolare retto (non limitato)



Si possono studiare le proprietà geometriche di queste curve a partire da questa definizione

Si possono introdurre le coniche in maniera differente (non sarà evidente che sono sezioni di un cono) e ne discuteremo la forma analitica in casi particolari.

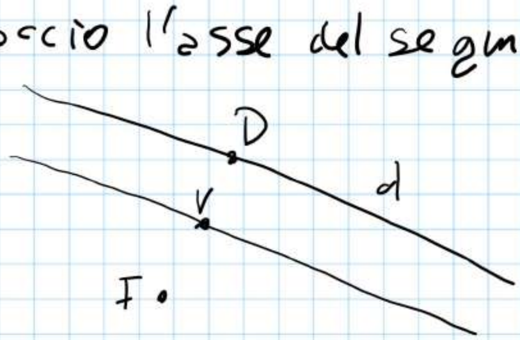
- Parabola: dato un punto F (detto fuoco) e una retta d (detta direttrice) non passante per F, la parabola di fuoco F e direttrice d è il luogo geometrico dei punti equidistanti da F e d



P non appartiene alla parabola

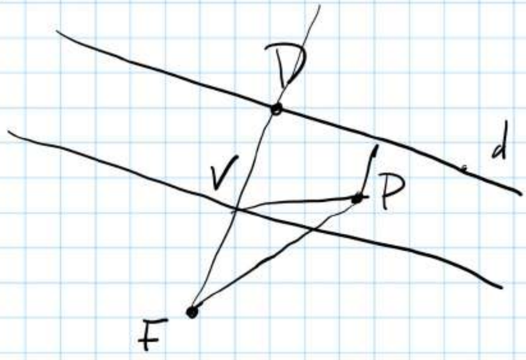
Q appartiene alla parabola

Se considero la proiezione D di F su d e faccio l'asse del segmento DF (notiamo che quest'asse è parallelo alla direttrice)



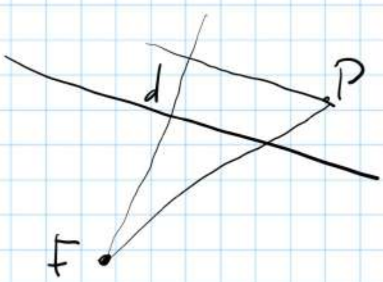
allora la parabola sta tutta nel semipiano delimitato da questo asse e contenente F

Infatti prendiamo P che non sta in questo semipiano

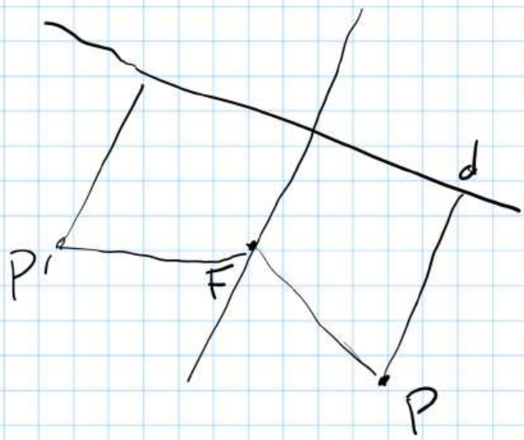


Infatti se P sta nella fascia compresa tra la direttrice e l'asse del segmento DF la sua distanza dalla direttrice è minore della distanza di V da D mentre la sua distanza da F è maggiore della distanza di V da F. Poiché $d(V,D) = d(V,F)$, il punto P è più vicino a d. rispetto a F

Se invece P sta nel semipiano delimitato da d e non contenente F, si verifica facilmente che pure $d(P,d) < d(P,F)$



Altre proprietà la retta per F, ortogonale a d è un asse di simmetria:

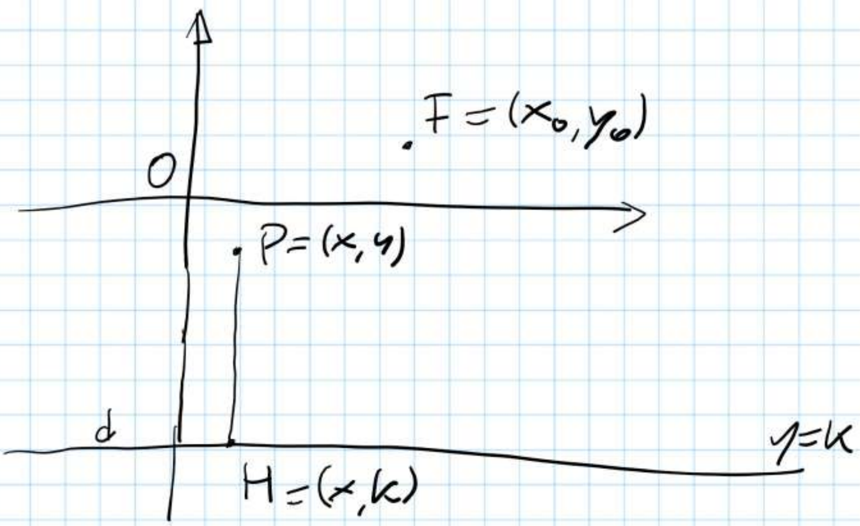


Se P sta sulla parabola e ne faccio il simmetrico P' rispetto all'asse si vede subito che $d(P,F) = d(P',F)$ e $d(P,d) = d(P',d)$

Descrizione analitica di una parabola.

Potremmo prendere una retta generica $d: ax+by+c=0$ e un punto generico $F=(x_0,y_0)$ con $ax_0+by_0+c\neq 0$ e imporre che un punto generico $P=(x,y)$ sia tale che $d(P,F)=d(P,d)$ ma non abbiamo (ancora) una formula semplice per $d(P,d)$.

Ci mettiamo in un caso particolare: supponiamo che la retta d sia parallela a uno degli assi cartesiani. Ad esempio sia $d: y=k$ (parallela asse x) e sia $F=(x_0,y_0)$ con $F\notin d$, cioè $y_0\neq k$.



Preso $P=(x,y)$ la sua distanza da F è $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Per calcolare la distanza di P da d considero la sua proiezione H su d. Questa avrà coordinate (x,k).

Dunque $d(P,d)=d(P,H)=\sqrt{(x-x)^2+(y-k)^2}$

Pertanto P sta sulla parabola se e solo se

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(y-k)^2}$$

cioè

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(y-k)^2$$

espandendo

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=y^2-2ky+k^2$$

cioè

$$x^2-2x_0x+(x_0^2+y_0^2-k^2)=2(y_0-k)y$$

Ma $y_0 \neq k$ ($F \notin d$): possiamo dividere per $2(y_0-k)$ e trovare l'equazione

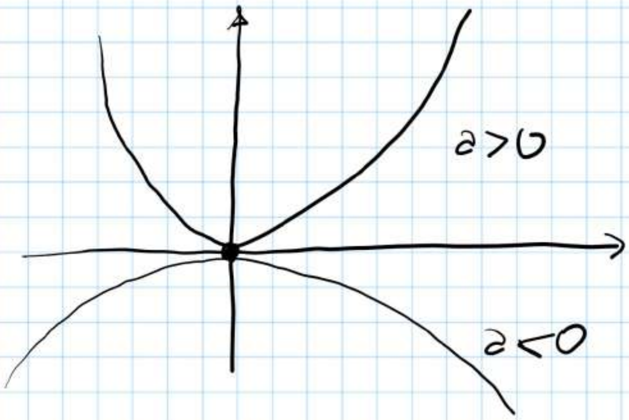
$$y = \frac{1}{2(y_0-k)}x^2 - \frac{x_0}{y_0-k}x + \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2y_0-k}$$

che possiamo riscrivere come

(*) $y = ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$

Viceversa tramite conti si può verificare che ogni equazione del tipo (*) rappresenta una parabola.

Casi particolari $y = ax^2$ (cioè $b=c=0$



L'asse di simmetria è l'asse delle y e la parabola passa per l'origine (anzi ha il vertice in O

In generale il segno di a mi dà informazioni sul semipiano in cui vive la parabola.

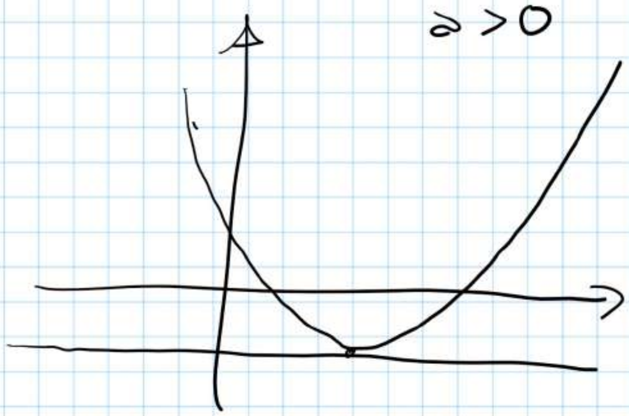
$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

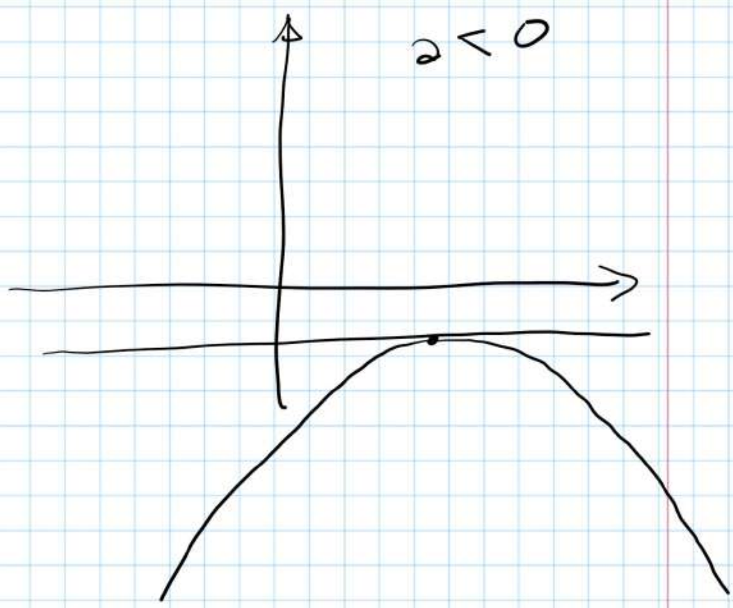
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Se $a>0$ per ogni x ottengo valori maggiori o uguali di $\frac{4ac-b^2}{4b}$

Se $a<0$ per ogni x ottengo valori minori o uguali di $\frac{4ac-b^2}{4b}$.

Dunque la parabola sta nel semipiano "superiore" alla retta $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ se $a>0$ e nel semipiano "inferiore" se $a<0$





Quando $x=-\frac{b}{2a}$, ottengo il punto che sta esattamente su quella retta, cioè il vertice

Esempio: data la parabola $\gamma: y=-3x^2+2x-5$, voglio trovare il vertice e l'asse di simmetria

$$y=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)-5=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-5=$$

$$-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{14}{3}$$

Per $x=\frac{1}{3}$ trovo $y=-\frac{14}{3}$. Il vertice è allora $V=\left(\frac{1}{3},-\frac{14}{3}\right)$ e l'asse di simmetria è $x=\frac{1}{3}$.

Per intersecare una retta con una parabola si fa come nel caso di una circonferenza. Si mettono cioè a sistema le equazioni

$$\begin{cases} hx+ky+l=0 \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$$ con h,k non entrambi nulli

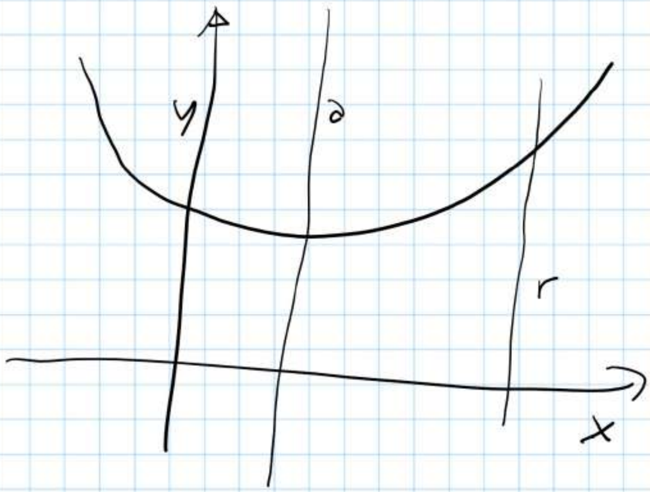
Per la risolvente posso sostituire nella 1ª eq. l'espressione di y data dalla 2ª eq.

$$hx + k(ax^2 + bx + c) + l = 0, \text{ cioè}$$

$$kax^2 + (kb + h)x + kc + l = 0$$

se $k \neq 0$ ho un'equazione di 2° grado (di cui posso studiare il determinante.

Se $k = 0$ (e quindi $h \neq 0$) l'equazione si riduce a $hx + l = 0$ che ha un'unica soluzione. In realtà sto intersecando con una retta parallela all'asse di simmetria



Esercizio: trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, vertice $V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ e tangente la retta $r: x + y - 2 = 0$.

Sol: Asse parallelo all'asse y, mi dice che l'equazione è del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Ma, sapendo che il vertice ha coordinate $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ con il completamento ai quadrati troviamo una forma del tipo

$$y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \qquad a \neq 0$$

Impongo la tangenza a r

$$\begin{cases} y = a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

La risolvente è

$$x + a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - 2 = 0$$

cioè

$$a x^2 + (1+a)x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a = 0$$

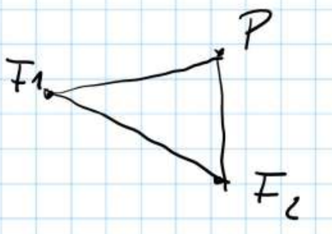
Pongo il discriminante uguale a 0 e trovo

$$0 = (1+a)^2 - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}a\right)a = 1+2a+a^2-a-a^2 = 1+a$$

che ha soluzione $a=-1$. Quindi abbiamo la parabola $y = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ cioè

$$y = -x^2 - x + 2$$

Ellisse: dati due punti F_1 e F_2 nel piano (non necessariamente distinti) e un numero k maggiore della distanza di F_1 da F_2, l'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e parametro k è il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da F_1 e da F_2 è uguale a k

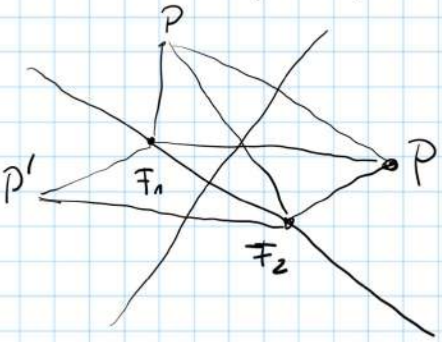


Dato P nel piano, per la disuguaglianza triangolare abbiamo che $d(P,F_1)+d(P,F_2) \geq d(F_1,F_2)$

Questo è il motivo per cui si pone $k > d(F_1,F_2)$

Se $F_1=F_2$, l'ellisse si riduce ai punti P tali che $d(P,F_1)+d(P,F_2)=k$, cioè $d(P,F_1)=\frac{k}{2}$, vale a dire abbiamo la circonferenza di centro F_1 e raggio $\frac{k}{2}$.

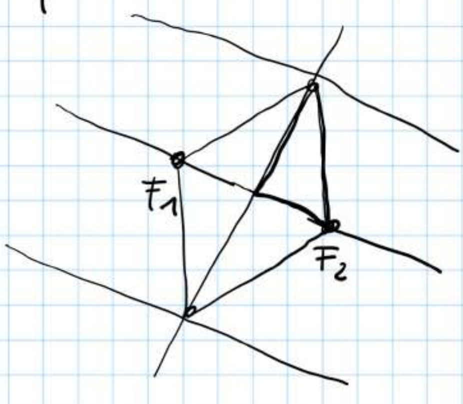
Alcune proprietà: l'ellisse ha 2 assi di



simmetria e cioè la retta che passa per i due fuochi (asse focale) e l'asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ (quando $F_1=F_2$ in realtà abbiamo infiniti assi di simmetria)

A differenza della parabola, l'ellisse è una curva limitata (infatti ogni suo punto ha distanza limitata dai fuochi. Più precisamente:

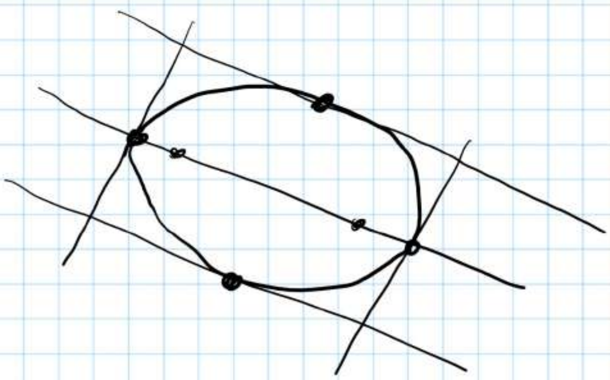
l'ellisse interseca ciascuno dei due assi in due punti



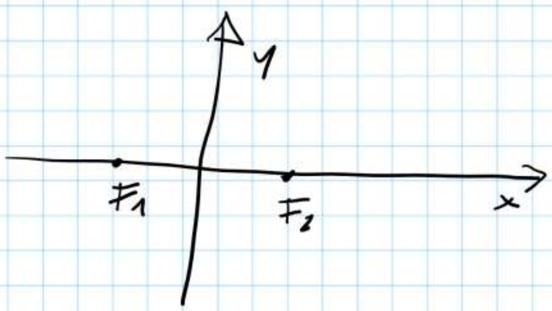
So che $k > d(F_1,F_2)$. Considero i punti sull'asse non focale che distano $\frac{k}{2}$ da F_1 e F_2: questi formano dei triangoli rettangoli i cui vertici sono rispettivamente uno dei fuochi, l'intersezione degli assi ed essi stessi.

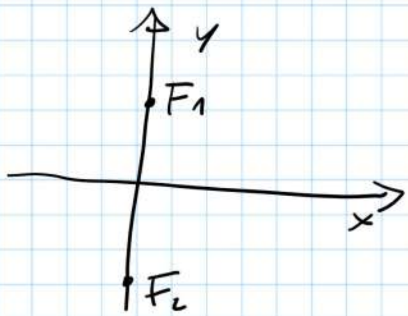
L'ipotenusa ha lunghezza $\frac{k}{2}$, uno dei cateti ha lunghezza $\frac{d(F_1,F_2)}{2}$ e potrei quindi calcolare l'altro cateto si potrebbe mostrare che l'ellisse è contenuta nella fascia compresa tra le due rette parallele all'asse focale e passanti questi due punti (che sono detti vertici).

Esistono altri due vertici che sono i punti dell'ellisse sull'asse focale e anche qui posso mostrare che l'ellisse è contenuta nella fascia costruita similmente



Voglio descrivere analiticamente l'ellisse. Lo facciamo in un caso particolare: siano i fuochi su uno degli assi coordinati e siano simmetrici rispetto all'origine





Siano F_1 e F_2 sull'asse x: quindi $F_2=(c,0)$, $F_1=(-c,0)$

e sia $k=d(F_1,F_2)>2|c|$

Prendiamo $P=(x,y)$ generico e ne calcoliamo la distanza da F_1 e F_2. Imponiamo che la somma di queste distanze sia k

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=k$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=k-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=k^2-2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$2k\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=k^2-4cx$$

Elevo ancora al quadrato

$$4k^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=k^4-8k^2cx+16c^2x^2$$

$$(4k^2-16c^2)+4k^2y^2=k^4-4k^2c^2$$

$$\frac{4k^2-16c^2}{k^2(k^2-4c^2)}x^2+\frac{4k^2}{k^2(k^2-4c^2)}y^2=1$$

$$\underset{\underset{0}{\vee}}{\frac{4}{k^2}}x^2+\underset{\underset{0}{\vee}}{\frac{4}{k^2-4c^2}}y^2=1$$

$\longleftarrow$ perché $k>2|c|$.

Posso riscriverla così

$hx^2+ly^2=1$ con h e l numeri positivi

Viceversa un'equazione di questo tipo rappresenta un'ellisse.

Spesso si scrive in questo

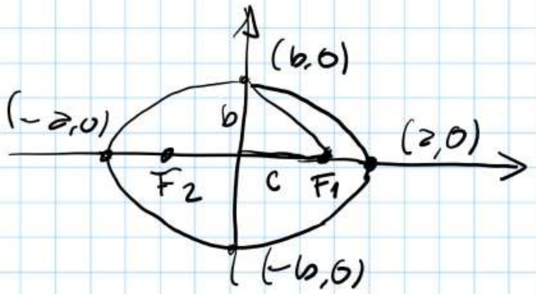
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con } a\neq 0,\ b\neq 0$$

Se scambiamo il ruolo di x e y troviamo un'equazione dello stesso tipo.

Che informazioni possiamo ricavare dall'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Innanzitutto, le coordinate, intersecando con gli assi coordinati

$x=0 \quad \frac{y^2}{b^2}=1 \quad y=b,\ y=-b$

$y=0 \quad \frac{x^2}{a^2}=1 \quad x=a,\ y=-a$



Qual è l'asse focale e quali sono i fuochi?

Gli assi intercettano due segmenti con l'ellisse.

Quello più lungo corrisponde all'asse focale. Se ad esempio $a>0$ determiniamo i fuochi

Siano $F_1=(c,0)$ e $F_2=(-c,0)$. Notiamo che $d((a,0),F_1)=a-c$ e $d((a,0),F_2)=a+c$. Quindi

$$d((a,0),F_1)+d((a,0),F_2)=2a$$

$$d((b,0),F_1)=\sqrt{b^2+c^2}=d((b,0),F_2)$$ teorema di Pitagora.

Dunque $2\sqrt{b^2+c^2}=2a$ cioè $b^2+c^2=a^2$ cioè $c^2=a^2-b^2$. Dunque i fuochi sono

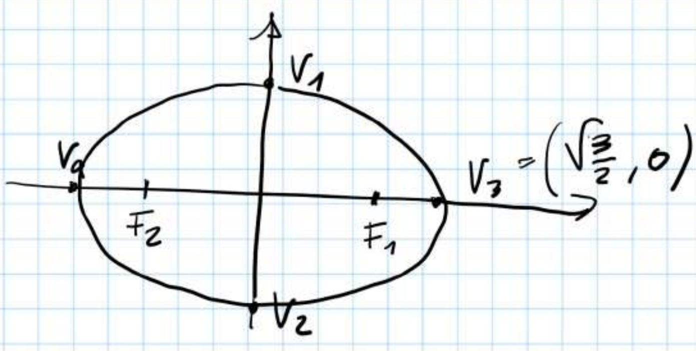
$$F_1=\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right) \quad e \quad F_2=\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$$

Esercizio: data l'ellisse di equazione $2x^2+5y^2=3$ determinarne vertici e fuochi

Intersechiamo con gli assi

$x=0$ $\quad 5y^2=3$ da cui $y=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad V_1=\left(0,\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, $V_2=\left(0,-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

$y=0$ $\quad 2x^2=3$ da cui $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad V_3=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$, $V_4=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$



Sia $F_1 = (c,0)$, $F_2 = (-c,0)$

$$d(V_1,F_1)+d(V_1,F_2)=\sqrt{c^2+\frac{3}{5}}+\sqrt{c^2+\frac{3}{5}}$$

$$d(V_3,F_1)+d(V_3,F_2)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-c\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+c\right)=2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Uguagliando trovo l'equazione

$$2\sqrt{c^2+\frac{3}{5}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}$$ da cui segue

$c^2+\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$ cioè $c^2=\frac{9}{10}$, quindi $c=\frac{3}{\sqrt{10}}$

Intersecando un'ellisse con una retta trovo sempre una risolvente di grado 2

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ hx+ky+l=0 \end{cases}$$

se $h \neq 0$, ricavo x in funzione di y e abbiamo

$$\begin{cases} x=-\frac{k}{h}y-\frac{l}{h} \\ \frac{\left(-\frac{k}{h}y-\frac{l}{h}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Il coefficiente di y^2 nella risolvente è

$\frac{k^2}{h^2a^2}+\frac{1}{b^2}$ che è sempre non nullo.